10. Смесено произведение

Считаме, че сме фиксирали ориентацията в пространството.

1. Дефиниция: Смесено произведение на векторите **a,b,c** наричаме числото

$$(\mathbf{a,b,c}) = < a \times b, c >.$$

1. Теорема: Нека векторите **a,b,c** не са компланарни.Тогава обемът на паралелепипеда построен върху **a,b,c** е равен на $|(\mathbf{a,b,c})|$, а обемът на тетраедъра, построен върху **a,b,c** е равен на $\frac{1}{6}|(\mathbf{a,b,c})|$.
Доказателство:
Нека т.O е произволна точка от пространството и точките A, B, C са, такива че $\overrightarrow{OA}$ =**a**, $\overrightarrow{OB}$ =**b** и $\overrightarrow{OC}$ =**c**.
Нека $OAC_1BCB_1O_1A_1$ е паралелепипед построен върху **a,b,c**. Нека h е височната спусната от т.C към страната OAC_1B. Обемът на паралелепипеда е $V = S_{OAC_1B}h$.
OAC_1B е успоредник постоен върху **a,b**. Следователно лицето S_{OAC_1B} е равно на $|a \times b|$.
Нека $\varphi = \angle(a \times b, c)$.
Ако $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, то $\alpha = \varphi$, следователно $\cos\alpha = \cos\varphi \geq 0$ и $\cos\alpha = |\cos\varphi|$.
Ако $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$, то $\alpha = \pi - \varphi$, следователно $\cos\alpha = -\cos\varphi \geq 0$ и $\cos\alpha = |\cos\varphi|$.
Имаме $h = |c|\cos\alpha = |c||\cos\varphi|$. Следователно обемът $V = |a \times b||c||\cos\varphi| = |< a \times b, c > | = |(a, b, c)|$.
Лицето на тетраедъра построен върху **a,b,c** е равен на $\dfrac{S_{OAB}h}{3}$, а $S_{OAB} = \frac{1}{2}|a \times b|$, т.е. $\frac{1}{3}\frac{1}{2}|a \times b||c||\cos\varphi| = \frac{1}{6}(a, b, c)$.

Свойства: Смесеното произведение има следните свойства:
1) $(\mathbf{a,b,c}) = (\mathbf{b,c,a}) = (\mathbf{c,a,b}) = -(\mathbf{b,a,c}) = -(\mathbf{c,b,a}) = -(\mathbf{a,c,b})$;
2) $(\lambda\mathbf{a,b,c}) = (\mathbf{a},\lambda\mathbf{b,c}) = (\mathbf{a,b},\lambda\mathbf{c}) = \lambda\mathbf{a,b,c}$, за $\lambda \in \mathbb{R}$;
3) $(a_1 + a_2,\mathbf{b,c}) = (a_1,\mathbf{b,c}) + (a_2,\mathbf{b,c})$.

2. Теорема: Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е афинна координатна система в пространството и векторите **a,b,c** имат кординати съответно (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) и (c_1, c_2, c_3) спрямо K, тогава

$$\textbf{(a,b,c)}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}(e_1, e_2, e_3)$$

Доказателство:
Имаме **(a,b,c)**$= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)$;
Тъй като смесеното произведение е линейно относно трите си аргумента получаваме:

$$\textbf{(a,b,c)}= \sum_{i,j,k=1}^{3} a_ib_jc_k(e_i, e_j, e_k).$$

Ако два от векторите e_i, e_j, e_k са равни, то смесеното произведение $(e_i, e_j, e_k) = 0$ и така получаваме

$$\textbf{(a,b,c)}= (a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}(e_1, e_2, e_3)$$